ДИС Кирчев 15.11.12

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad x \in D$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha \qquad \alpha \to 0 \text{ от } \Delta x \to 0$$

Означения $\frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \to 0 \qquad \Delta x \to 0$

$$\frac{O(x - x_0)}{(x - x_0)} \to 0 \qquad x \to x_0$$

Можем да е каже $\Delta y = f'(x)\Delta x + \underbrace{\alpha \Delta x}_{0} = f(x)\Delta x + 0$

$f'(x)\Delta x$ - диференциал на $f(x)$
$f(x)\Delta x = df(x)$ - или $\Delta x = dx$
$dy = f'(x)dx$

$$\left.\begin{aligned} d(f+g) &= df + dg \\ d\,fg &= g\,df + f\,dg \\ d\frac{f}{g} &= \frac{1}{g^2}(g\,df - f\,dg) \end{aligned}\right\} \quad d(Cg) = C\,dg$$

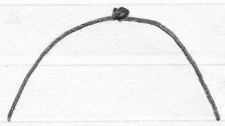
диференциалната константа е 0

Локален max и локален min
(локален - вътрешен)

$x_0 \in (a,b)$ ако $\exists \varepsilon > 0$ и $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow$

$f(x) \leq f(x_0)$ max

$f(x) \geq f(x_0)$ min



Е строг максимум и строг минимум

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \longrightarrow f'(x_0)$$

1) Искаме $f(x_0)$ - мах и $\Delta x > 0$

след граничен преход $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$ max

2) Ако $\Delta x < 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ min

от 1) и 2) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

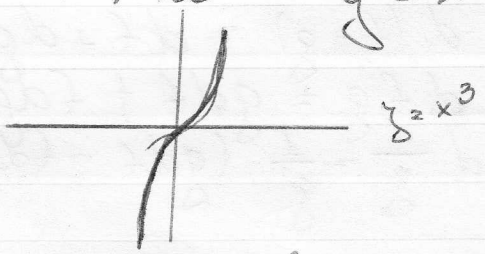
след граничен преход $\Rightarrow$ производната $= 0$

Т

Ако функцията има локален екстремум в т. x_0 и има производна то тази производна е равна на нула (Ферма)

Фа производна $= nx^{n-1}$. Ако $y = x^3$

то $y' = 3x^2$



Т на Рол

$f(x)$ $D(a,b)$ и е непрекъсната в интервал $[a,b]$. Нека $f(a) = f(b)$

Съществува поне една точка $3 \in (a,b)$ т.че

$f'(3) = 0$

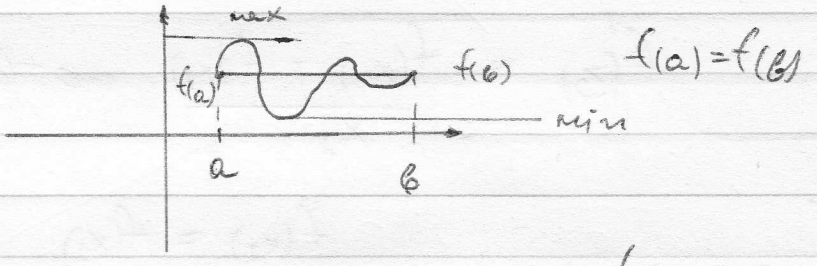
Док-во

Нека $\exists M$ и m (точна горна и долна гр) и $f(x_M) = M$ (точна горна), $f(x_m) = m$ (точна долна)

От $f(a) = f(b)$ то $M = m \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$

т. е. константа т. е $= 0$

Нека т. $x_M \in (a,b)$ (вътрешна) има локален максимум. От Т. на Ферма $\Rightarrow x_M = 0$



Теорема на крайните нарастания (Лагранже)

$f(x)$ - диференцируема в интервал (a,b)
$f(x)$ - непрекъсната в интервал $[a,b]$
$\exists$ т. 3 т.че $f'(3) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

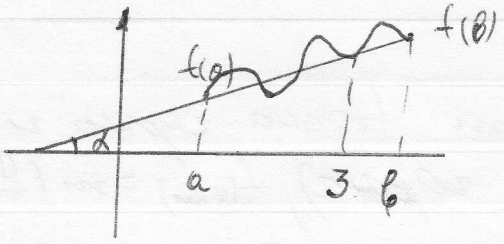
$g(x) = f(x) + kx$ нека $g(a) = g(b)$

$$f(a) + ka = g(a) = g(b) = f(b) + kb \Rightarrow$$

$$k = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$g'(3) = 0$ съгласно теорема на Рол

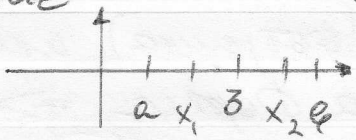
$$0 = g'(3) = f'(3) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$tg\,\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$x \in (a,b)$ $f(x)$ $f'(x) = 0$

Твърдение $f(x)$ е константа



$$f'(3) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \text{ по твърдение} = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_2) = f(x_1)$$

Основна теорема на интегралното смятане

I (следствие от Рол) Теорема на Коши

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в (a,b)
$f(x)$ непрекъсната в $[a,b]$
$g'(x)$ при $x \in (a,b) \neq 0$
$\exists$ т. 3 т. е

$$\frac{f'(3)}{g'(3)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$g(b) \neq g(a)$
Док-во

Нека $h(x) = f(x) - k\,g(x)$ и искаме $h(a) = h(b)$

$$f(a) - k\,g(a) = f(b) - k\,g(b) \Rightarrow$$

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \exists\, h'(\xi) = 0$$

$$h'(\xi) = f'(\xi) - k g'(\xi) \Rightarrow k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$(\sin x)'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(\sin x)''' = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\cos x)'' = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(\cos x)''' = -\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$(\cos x)^{(n)} = -\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$